ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Β' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

1) Να αποδειχθεί ότι:

i) $32/\left[(-3)^{\nu}-1-4\nu+8\nu^2\right]$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

ii) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$8/\left\{2\nu^2-\nu-\left[(-3)^{\nu-1}+(-3)^{\nu-2}+\ldots+(-3)+1\right]\right\}.$$

2) i) Να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε ακεραίους α, β και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $(\pi o\lambda\alpha+\beta)^{\nu}= =\pi o\lambda\alpha+\beta^{\nu}$.

ii) Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 7^{2004}.

3) Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ με $5/\alpha$ και $6/\alpha$, να αποδειχθεί ότι $30/\alpha$.

4) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν για τους οποίους καθένας από τους ακεραίους $4\nu+3$ και $\nu+2$ να είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

5) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς ν, με $\nu>1$, για τους οποίους ισχύει $\dfrac{2\nu+3}{\nu-1}\in\mathbb{N}$.

6) Έστω α ένας διψήφιος φυσικός αριθμός με x το ψηφίο των δεκάδων και y το ψηφίο των μονάδων του. Να αποδειχθεί ότι αν $7/(3x+y)$, τότε $7/\alpha$.

7) Αν α είναι ένας διψήφιος ακέραιος και β ο αριθμός που προκύπτει από τον α αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, να αποδείξετε ότι η διαφορά $\alpha-\beta$ διαιρείται με τον 9.

8) Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό και στη συνέχεια γράφουμε πάλι τον αριθμό αυτό δίπλα στον πρώτο (για παράδειγμα 254254). Να αποδείξετε ότι ο εξαψήφιος αριθμός που σχηματίζεται διαιρείται με τον 7, τον 11 και τον 13.

9) Θεωρούμε τον τριψήφιο αριθμό

$$A=\alpha\cdot 10^2+\beta\cdot 10+\gamma$$

όπου $\alpha\neq 0$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Να αποδειχθούν οι ισοδυναμίες:

i) $7/A \Leftrightarrow 7/(\gamma+3\beta+2\alpha)$

ii) $13/A \Leftrightarrow 13/(\gamma-3\beta-4\alpha)$

10) Αν κανένας από τους θετικούς ακεραίους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 12, να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον από αυτούς με διαφορά η οποία να είναι πολλαπλάσιο του 12.

11) i) Να βρείτε τις τιμές του φυσικού αριθμού ν για τις οποίες ο αριθμός $\dfrac{2}{\nu-1}$ είναι φυσικός.

ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς ν και μ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{1}{\nu}+\dfrac{\nu}{\mu}+\dfrac{1}{\nu\mu}=1$.

12) i) Να αποδείξετε ότι:

α) $(x+1)^2-(x-1)^2=\pi o\lambda 4$ για κάθε $x\in\mathbb{Z}$,

β) αν ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε γράφεται σαν διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

ii) Να γράψετε τον 156 σαν διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

13) Αν $\nu\in\mathbb{N}$, με $\nu\geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{2^{\nu}}+1$ λήγει σε 7.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1) i) Μέσω επαγωγής:

• Για $\nu=1$ $\rightsquigarrow$ $32 \mid [(-3)^1-1-4\cdot1+8\cdot1^2] = -3-1-4+8=0$ ισχύει

• Έστω ότι η πρόταση ισχύει για k και θδό αληθεύει για $k+1$

Επομένως, $32 \mid [(-3)^k-1-4\cdot k+8\cdot k^2] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3)^k-1-4k+8k^2=32\lambda, \lambda\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3)^k = 32\lambda+1+4k-8k^2, \lambda\in\mathbb{Z}$ (1)

Θέλουμε, $32 \mid [(-3)^{k+1}-1-4(k+1)+8(k+1)^2]$

όπου, $(-3)^{k+1}-1-4(k+1)+8(k+1)^2 =$

$= (-3)(-3)^k-1-4k-4+8k^2+16k+8 \overset{(1)}{=}$

$= (-3)\cdot(32\lambda+1+4k-8k^2)-1-4k-4+8k^2+16k+8 =$

$= -3\cdot32\lambda-3-12k+24v^2+3+8k^2+12k =$

$= -3\cdot32\lambda+32k^2 = 32(-3\lambda+k^2) \rightsquigarrow$ πολλαπλάσιο του 32

Άρα, η αρχική πρόταση αληθεύει $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$

ii) Αφού, αποδείξαμε στην (i) ότι ισχύει

$32 \mid [(-3)^\nu-1-4\cdot\nu+8\cdot\nu^2] \Leftrightarrow (\exists\mu\in\mathbb{Z}): (-3)^\nu-1-4\nu+8\nu^2=32\cdot\mu \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((-3)-1)\cdot((-3)^{\nu-1}+(-3)^{\nu-2}+\dots+(-3)+1)-4\nu+8\nu^2=32\cdot\mu \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\cdot((-3)^{\nu-1}+\dots+1)-4\nu+8\nu^2=4\cdot8\mu \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{4}[-((-3)^{\nu-1}+\dots+1)-\nu+2\nu^2] = \cancel{4}\cdot8\mu \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\nu^2-\nu-((-3)^{\nu-1}+\dots+1)=8\mu, \mu\in\mathbb{Z}$

2) i) ΘΔΟ $(\pi o\lambda\, a+\beta)^\nu = \pi o\lambda\, a + \beta^\nu \Leftrightarrow (\pi o\lambda\, a+\beta)^\nu - \beta^\nu = \pi o\lambda\, a$

$$(\pi o\lambda\, a+\beta)^\nu - \beta^\nu \overset{(\exists k\in\mathbb{Z})}{=\!=\!=} (k\cdot a+\beta)^\nu - \beta^\nu =$$

$$= (ka+\beta-\beta)\cdot\Big[\underbrace{(ka+\beta)^{\nu-1}+(k\cdot a+\beta)^{\nu-2}\cdot\beta+\ldots+(ka+\beta)\,\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}}_{\lambda\in\mathbb{Z}}\Big] =$$

$$= k\cdot a\cdot\lambda = (k\cdot\lambda)a = \pi o\lambda\, a$$

ii) Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $\gamma = 7^{2004}$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του του γ με το 10

$\gamma = 7^{2004} = (7^2)^{1002} = 49^{1002}$ (1)

$7\cdot 7 = 49 = 50-1 = 5\cdot 10 - 1$ $(= \pi o\lambda\, 10 - 1)$

Άρα στην (1) είναι:

$49^{1002} = (5\cdot 10 - 1)^{1002} \overset{(i)}{=} 5\cdot 10 + (-1)^{1002} = 5\cdot 10 + 1 = 51$

Άρα, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $51=\gamma$ με το 10 είναι $\upsilon = 1$, που είναι το τελευταίο ψηφίο του γ.

3) $6|a \Leftrightarrow (\exists\lambda\in\mathbb{Z}): \alpha = 6\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}$

Έστω $\lambda = 5k+\upsilon$, $k,\upsilon\in\mathbb{Z}$ και $0\le\upsilon<5$

οπότε $a = 6\cdot(5k+\upsilon) = 30k + 6\upsilon \Rightarrow 6\upsilon = a - 30k$

και αφού $5|a$ και $5|30 \Rightarrow 5|(a-30k) = 6\upsilon$

Αναγκαστικά, $\upsilon = 0$ και συνεπώς $\lambda = 5k$ και $a = 30k$, $k\in\mathbb{Z}$ άρα $30|a$.

4) Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί, ώστε ο καθένας από τους ακέραιους $4\nu+3$ και $\nu+2$ είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού. Ας είναι $\nu\in\mathbb{N}$ και $x,y\in\mathbb{Z}$ ώστε:

$4\nu+3 = x^2$ και $\nu+2 = y^2 \Rightarrow \boxed{\nu = y^2-2}$

Άρα, $4(y^2-2)+3 = x^2 \Rightarrow 4y^2 - x^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2y-x)(2y+x) = 5$

Έχουμε $2y+x \in \mathbb{Z}$, άρα αναγκαστικά $2y-x \in \mathbb{N}$ αφού το $5 \in \mathbb{N}$. Επειδή, όμως $2y-x < 2y+x$ τότε, θα πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{l} 2y-x=1 \\ 2y+x=5 \end{array}\right| \Rightarrow y=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \quad \text{άτοπο}$$

5) $\dfrac{2\nu+3}{\nu-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\nu-1) \mid (2\nu+3)$

Αλλά, $(\nu-1) \mid (\nu-1)$

Επομένως, $(\nu-1) \mid [(2\nu+3)-2(\nu-1)]=5$

Άρα, $\nu-1=1$ ή $\nu-1=5 \Rightarrow \nu=2$ ή $\nu=6$.

- Για $\nu=2$ το $\dfrac{2\nu+3}{\nu-1} \rightsquigarrow \dfrac{7}{1}=7 \in \mathbb{N}$
- Για $\nu=6$ το $\dfrac{2\nu+3}{\nu-1} \rightsquigarrow \dfrac{15}{5}=3 \in \mathbb{N}$

6) $7 \mid (3x+y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}): 3x+y=7k \Rightarrow y=7k-3x$

ο α γράφεται στη μορφή

$$a=10x+y=10x+7k-3x=7x+7k=7\underbrace{(x+k)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 7 \mid a$.

7) α διψήφιος άρα γράφεται στην ακριβή μορφή

$a=10x+y$, με x αριθμός δεκάδων και y αριθμός μονάδων.

και ο $\beta=10y+x$ από υπόθεση

Άρα, $a-\beta=10x+y-(10y+x)=9(x-y) \Rightarrow 9 \mid (a-\beta)$.

8) Προφανώς ο εξαψήφιος γράφεται στη μορφή

$10^5 \cdot a + 10^4 \cdot \beta + 10^3 \cdot \gamma + 10^2 \cdot a + 10^1 \cdot \beta + 10^0 \cdot \gamma =$

$= 10^3 (10^2 \cdot a + 10^1 \cdot \beta + 10^0 \cdot \gamma) + 10^2 a + 10 \cdot \beta + \gamma =$

$= (10^3 + 1)(10^2 \cdot a + 10 \cdot \beta + \gamma) = 1001 (100a + 10\beta + \gamma) =$

$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10\beta + \gamma)$

9) i) $10 = 1 \cdot 7 + 3$, $10^2 = 100 = 14 \cdot 7 + 2$

$A = 14a \cdot 7 + 2a + 7\beta + 3\beta + \gamma =$

$= 7(14a + \beta) + (\gamma + 3\beta + 2a)$ (*)

Αφού $7 | A$ και $7 | 7(14a+\beta)$, τότε $7 | (\gamma + 3\beta + 2a)$

Αντίστροφα,

αφού $7 | (\gamma + 3\beta + 2a)$ και $7 | 7(14a+\beta)$ τότε

$7 | [7(14a+\beta) + (\gamma + 3\beta + 2a)] = A$

ii) $100 = 7 \cdot 13 + 9$

$A = 100a + 10\beta + \gamma = (7 \cdot 13 + 9)a + 13\beta - 3\beta + \gamma =$

$= 7 \cdot 13 a + 9a + 13\beta - 3\beta + \gamma = 8 \cdot 13a - 4a + 13\beta - 3\beta + \gamma =$

$= 13(8a + \beta) + (\gamma - 3\beta - 4a)$

Αφού $13 | 13(8a+\beta)$ και $13 | A$, τότε $13 | (\gamma - 3\beta - 4a)$

Αντίστροφα

αφού $13 | (\gamma - 3\beta - 4a)$ και $13 | 13(8a+\beta)$ τότε

$13 | [(\gamma - 3\beta - 4a) + 13(8a+\beta)] = A$

10) Τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης του καθενός από τους $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ με το 12 είναι $1, 2, \dots, 11$ δηλ. 11 σε πλήθος. Επειδή, οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ είναι 12 σε πλήθος, προκύπτει ότι θα υπάρχουν δυο από αυτούς οι οποίοι διαιρούμενοι με το 12 θα δίνουν το ίδιο υπόλοιπο. Η διαφορά αυτών των δυο αριθμών θα 'ναι πολλ/σιο του 12 αφού αν $a = 12k + u$ και $\beta = 12\lambda + u$, $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε:

$$a - \beta = 12k + \cancel{u} - 12\lambda - \cancel{u} = 12(k - \lambda) = \pi o\lambda 12.$$

11) i. $(v-1) \mid 2 \Leftrightarrow v - 1 = 1$ ή $v - 1 = 2 \Leftrightarrow v = 2$ ή $v = 3$

ii. Η σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\mu + v^2 + 1 = \mu \cdot v \quad , \forall \mu, v \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{v^2+1}{v-1} =$$

$$= \frac{v^2 - 1 + 2}{v-1} = \frac{v^2-1}{v-1} + \frac{2}{v-1} = v + 1 + \frac{2}{v-1}$$

Αυτό προκύπτει από τη διαίρεση του πολυωνύμου x^2+1 με το $x-1$, οπότε $x^2+1 = (x-1)(x+1) + 2$:

$$\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

Επομένως, $v + 1 + \frac{2}{v-1} = \mu \in \mathbb{N}$,

Άρα, $(v-1) \mid 2 \Rightarrow \boxed{v=2}$ ή $v=3 \Rightarrow \boxed{\mu=4}$ ή $\mu=5$

12) i) α. $(x+1)^2 - (x-1)^2 = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x + 2x + \cancel{1} - \cancel{1} = 4 \cdot x$

β. $a = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε $a = 4k = 2k + 2k =$

$$= (k^2 + 2k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = (k+1)^2 - (k-1)^2$$

ii) $156 = 4 \cdot 39$ δηλ. $k = 39$

$$156 = (39+1)^2 - (39-1)^2 = 40^2 - 38^2.$$

2ος

13) Έστω $a = 2^{2^\nu}+1$

ο α λήγει σε 7 αν-ν ο α-7 λήγει σε 0

δηλ. $a-7 = \pi o\lambda 10$.

ΘΔΟ μέσω επαγωγής $2^{2^\nu}-6 = \pi o\lambda.10 \Leftrightarrow 10 \mid 2^{2^\nu}-6$.

• Για $\nu=2 \leadsto 10 \mid 2^{2^2}-6 = 2^4-6 = 16-6 = 10$ ισχύει

• Έστω ότι ισχύει για $\nu=k$ και ΘΔΟ ισχύει για $\nu=k+1$

Ισχύει: $10 \mid 2^{2^k}-6$ και ΘΔΟ $10 \mid 2^{2^{k+1}}-6$.

(1) $10 \mid 2^{2^k}-6 \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Z}): 2^{2^k}-6 = 10\cdot\lambda \Rightarrow 2^{2^k} = 10\lambda+6$.

$2^{2^{k+1}}-6 = 2^{2^k\cdot 2}-6 = (2^2)^{2^k}-6 = 4^{2^k}-6 =$

$= (2\cdot 2)^{2^k}-6 = 2^{2^k}\cdot 2^{2^k}-6 = (10\lambda+6)(10\lambda+6)-6 =$

$= (10\lambda+6)^2-6 = 100\lambda^2+120\lambda+30 = 10(\underbrace{10\lambda^2+12\lambda+3}_{\mu\in\mathbb{Z}})$

$= 10\mu,\ \forall \mu \in \mathbb{Z}$ πολ/σιο του 10

Άρα, $10 \mid 2^{2^\nu}-6,\ \forall \nu \geq 2$